

# 1. КИНЕМАТИКА

## Теория

### Есептерді шығару мысалдары мен әдістемелік нұсқаулар

### Өз бетімен шығаруға арналған есептер

## Теория

**Механика** - механикалық қозғалыс заңдылықтарын және бұл қозғалысты тудыратын немесе өзгертетін себептерді зерттейтін физиканың бөлімі.

**Классикалық механика (Галилей-Ньютон механикасы)** – жылдамдықтары вакуумдағы жарықтың таралу жылдамдығымен салыстырғанда кем болатын макроскопиялық қозғалыс заңдарын зерттейді.

**Кинематика** – денелердің қозғалыс заңдарын және бұл қозғалысты тудыратын немесе өзгертетін себептерді зерттейді.

**Физикалық модель** – нақты есептердің шарттарынан тәуелді денелердің қозғалысын (денелердің немесе олардың бөліктерінің уақыт өтуімен өзара орналасуының өзгеруін) сипаттау үшін механикада қолданылатын модельдер.

**Материалдық нүкте** – берілген есепте өлшемдерін ескермеуге болатын, массаға ие дене.

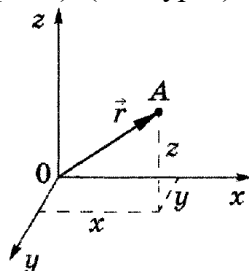
**Абсолюттік қатты дене** – деформацияланбайтын дене және барлық шарттарда екі нүктенің арасындағы қашықтық тұрақты болады.

**Абсолютті серпімді дене** – деформациясы Гук заңына бағынатын денені айтады. Сыртқы күштердің әсері жойылған кейін дене өзінің бастапқы өлшемдері мен пішіндерін қабылдайды.

**Абсолюттік серпімсіз дене** – сыртқы күштердің әсері жойылғаннан кейін деформацияланған күйін толығымен сақтайтын дене.

**Санақ басы** - басқа (қозғалатын) денелердің орындары анықталатын кез кезген таңдалған дене. Кез келген қозғалатын дененің орны санақ денесіне қатысты анықталды, сондықтан механикалық қозғалыс салыстырмалы.

**Координат жүйесі** – санақ денесімен байланысқан жүйесі (қарапайым жағдайда тікбұрышты декарттық хуз жүйесі). (1.1-сурет).



1.1-сурет.

**Санақ жүйесі** – санақ денесінің, онымен байланысқан координаттар жүйесі мен бір-бірімен синхрондалған сағаттардың жиынтығы.

**Материалдық нүкте қозғалысының кинематикалық теңдеулері**

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$  Декарттық координаталар жүйесінде А материялық нүктенің орны хуз үш координатамен немесе  $\vec{r}$  радиус-вектормен анықталады. Радиус вектор - координаталардың санақ басынан А нүктесіне жүргізілген вектор. Материалдық нүктенің қозғалысы кезінде уақыт өтуімен оның координаталары өзгереді, сондықтан оның қозғалысы скаляр теңдеулердің жүйесімен немесе оған эквивалентті векторлық теңдеумен анықталады.
   
 немесе
   
 $\vec{r} = \vec{r}(t)$

**Траектория**—таңдалған санақ жүйесіне қатысты материялық нүктенің (немесе дененің) басып өткен ізінің алгебралық (немесе қозғалыстағы нүктенің радиус-векторының ұшының сызған сызығы) қосындысы.

Траектория түріне қарай қозғалыс: түзу сызықты, қисық сызықты, шеңбер бойымен қозғалыс және т.б.с.с. Траекторияның түрі материялық нүкте қозғалысының сипатына және санақ жүйесіне тәуелді болады.

**Орын ауыстыру**  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  - дененің бастапқы орнын оның соңғы орнымен қосатын кесіндісіне тең векторлық шаманы айтады (1.2-сурет).

**Жол**  $\Delta S = \Delta S(t)$  - нүктенің берілген  $\Delta t$  уақыт ішінде бір орыннан екінші орынға қозғалғанда сызатын траекториясының ұзындығына тең скалярлық (әрқашан оң) шама (1.2-сурет).

**Жылдамдық** - қозғалыстың шапшандығын, уақыттың берілген мезетіндегі оның қозғалыс бағытын анықтайтын векторлық шама. Өлшем бірлігі – м/с.

**Орташа жылдамдық** – нүктенің радиус векторы  $\Delta \vec{r}$  өсімшесінің уақыттың аралығына  $\Delta t$  қатынасымен анықталатын векторлық шама:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (1.1)$$

**Лездік жылдамдық** – қозғалыстағы нүктенің радиус-векторының уақыт бойынша бірінші ретті туындысымен анықталатын векторлық шама:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.2)$$

**Лездік жылдамдықтың модулі** – жолдың уақыт бойынша бірінші ретті туындысына тең:

$$v = \left| \vec{v} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left| \Delta \vec{r} \right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \quad (1.3)$$

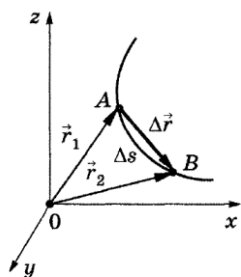
Жылдамдық векторының координат осьтеріне проекциялары:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.4)$$

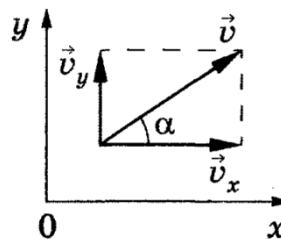
Бір жазықтықтағы қозғалыс:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (1.5)$$

мұндағы  $v_x = v \cos \alpha$ ,  $v_y = v \sin \alpha$  - жылдамдық векторының координат осьтеріне проекциялары (1.3-сурет).



1.2-сурет.



1.3-сурет.

**Үдеу** – жылдамдықтың модуль және бағыты бойынша өзгеру шапшаңдығын анықтайтын бірқалыпты емес қозғалыстың сипаттамасы. Өлшем бірлігі –  $\text{м/с}^2$ .

**Орташа үдеу** – жылдамдық өзгерісінің уақыт интервалына қатынасына тең векторлық шама:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1.6)$$

**Лездік үдеу** – жылдамдықтың уақыт бойынша бірінші ретті туындысымен анықталатын векторлық шама:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.7)$$

**Тангенциалды үдеу** – жылдамдықтың модуль бойынша өзгеру шапшаңдығын сипаттайды (траекторияға жанама бойымен бағытталады):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \quad (1.8)$$

**Нормаль үдеу** – жылдамдықтың бағыт бойынша өзгеру шапшаңдығын сипаттайды (траекторияның қисықтығының центріне бағытталған):

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad (1.9)$$

**Қисықсызықты қозғалыс кесіндегі толық үдеу** – тангенциалды және нормаль үдеулерінің геометриялық қосындысы:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (1.10)$$

Толық үдеудің модулі:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (1.11)$$

Материялық нүктенің  $t_1$ –ден  $t_2$  -ге дейінгі уақыт аралығында жүріп өткен жолы:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (1.12)$$

Материялық нүктенің бірқалыпты қозғалыс кезіндегі жүріп өткен жолы:

$$S = \int_0^t v dt = v \int_0^t dt = vt \quad (1.13)$$

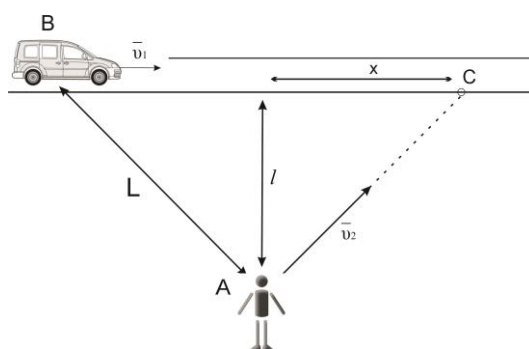
Материялық нүктенің бірқалыпты үдемелі қозғалыс кезіндегі жүріп өткен жолы:

$$S = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (1.14)$$

## Есептерді шығару мысалдары мен әдістемелік нұсқаулар

**1.1.** Мәшине тас жолдың түзу учаскесі бойымен  $v_1 = 60$  км/сағ тұрақты жылдамдықпен қозғалады. Бастапқыда тас жолдан  $l = 90$  м ара-қашықтықта орналасқан жаяу адам  $v_2 = 18$  км/сағ жылдамдықпен жүгіреді. Мәшинадан қандай ең аз бастапқы  $L$  ара-қашықтықта жаяу адам онымен кездесе алады?

**Шешімі:** Кездесу  $C$  нүктесі 1.4-суретте көрсетілген. Жаяу адам оған  $t_2 = AC/v_2 = \sqrt{l^2 + x^2}/v_2$  уақытта жүгіріп жетеді, ал мәшина үшін  $t_1 = BC/v_1 = (\sqrt{L^2 - l^2} + x)/v_1$ . Егер  $t_1 \geq t_2$  болса, онда жаяу адам мәшинамен кездесуге үлгереді. Ол мәшинаны максималды түрде озып өтетіндей тас жолдағы сондай  $C$  нүктесіне жүгіруі тиіс, яғни  $t_1 - t_2 = \max$ .



1.4-сурет.

Экстремум шартынан:

$$\frac{d(t_1 - t_2)}{dx} = \left( \frac{\sqrt{L^2 - l^2} + x}{v_1} - \frac{\sqrt{l^2 + x^2}}{v_2} \right)' = \frac{1}{v_1} - \frac{x}{v_2 \sqrt{l^2 + x^2}} = 0$$

Онда келесіні аламыз:  $x = \frac{v_2 l}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}$ . Табылған оптималды  $x$  ара-қашықтықты қоя отырып, келесіге келеміз:

$$(t_1 - t_2)_{\max} = \frac{\sqrt{L^2 - l^2}}{v_1} - \frac{l \sqrt{v_1^2 - v_2^2}}{v_1 v_2} \quad (1.1.1)$$

Мәшинаға дейінгі бастапқы  $L$  ара-қашықтық кем болған сайын, озу уақыты кемірек болады.  $(t_1 - t_2)_{\max} = 0$  кезінде, мәшина да жаяу адам да кездесу нүктесіне бірмезгілде жетеді. (1.1)-теңдеуден  $L_{\min} = \frac{lv_1}{v_2} = 300$  м екендігі шығады.

**1.2.** Ғарыш аппараты қону кезінде тежеуші парашютті шығарып, нәтижесінде тежеуші үдеу  $\beta = 0,02 \text{ м}^{-1}$  пропорционалдық коэффициентімен жылдамдық квадратына пропорционал болып шығады. Бастапқы қону  $v_0 = 240 \text{ м/с}$  жылдамдығының 100 есе кемуі

кезінде тежегіш қалыптар іске қосылып, аппарат тоқтайды. Тежелу уақытын және жолын, кону кезіндегі қозғалыстың орташа жылдамдығын анықтаңыздар.

**Шешімі:** Есептің шартына сәйкес

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v^2$$

Айнымалыларды бөліп және бастапқы шарттарды ( $t = 0$  кезінде  $v = v_0$ ) ескере отырып, бұл теңдеуді интегралдасақ, келесіні аламыз:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\beta \int_0^t dt, \quad \text{бұдан} \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \beta t.$$

Аппараттың жылдамдығы уақыт өтуімен  $v = \frac{v_0}{1 + \beta v_0 t}$  заңы бойынша өзгереді. Бұл теңдеуге соңғы  $v = 0,01 \cdot v_0$  жылдамдықты қоя отырып, тежелу уақытын табамыз:  $t = 99 / (\beta v_0) = 20,6$  с. Енді тежелу жолын анықтайық:

$$l = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{v_0 dt}{1 + \beta v_0 t} = \frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta v_0 t) = \frac{1}{\beta} \ln 100 = 230 \text{ м}$$

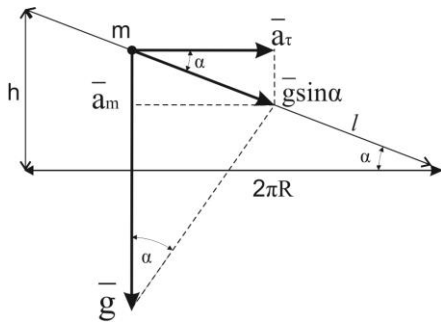
Тежелу кезіндегі орташа жылдамдық анықтама бойынша келесі шамаға тең:

$$\langle v \rangle = \frac{l}{t} = \frac{(1/\beta) \cdot \ln 100}{99 / (\beta v_0)} = \frac{v_0 \cdot \ln 100}{99} = 11,2 \text{ м/с}$$

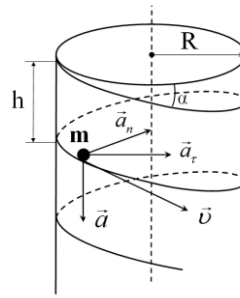
**1.3.** Радиусы  $R$  және қадамы  $h$  болатын винттік науа бойымен бастапқы жылдамдықсыз сырғанап түсетін  $n$ -ші орам соңындағы дененің үдеуін анықтаңыздар (1.5-сурет). Сырғанау уақытын анықтаңыздар. Үйкелісті ескермеңіздер.

**Шешімі:** Винттік (спиральдік) сызық бойынша қозғалысты екі қозғалыстың қосындысы түрінде қарастыруға болады: горизонталь жазықтықтағы  $R$  радиусты шеңбер бойымен айналмалы қозғалыс және біруақытта вертикаль төмен құлау.

Дененің еркін сырғанауы ауырлық күшінің траектория бағытына проекциясы әсерінен жүреді. Траектория көкжиекке  $\alpha$  бұрышпен көлбеуленгендіктен (1.6-сурет), онда траектория бойымен дене жанама үдеумен  $g \sin \alpha$  қозғалады, мұндағы  $g$  - еркін түсу үдеуі. Бұл үдеуді вертикаль және горизонталь проекцияларға жіктесек, онда дененің төмен қарай  $a_m = (g \sin \alpha) \cdot \sin \alpha$  үдеумен қозғалатынын, сонымен бірге шеңбер бойынша тангенциаль үдеумен  $a_\tau = (g \sin \alpha) \cdot \cos \alpha$  және  $a_n = (v')^2 / R$  нормаль үдеумен біруақытта айналатындығы шығады, мұндағы  $v' = v \cos \alpha$  - горизонталь бағытқа дене жылдамдығының проекциясы.



1.5-сурет. Дененің үдеу векторы



1.6-сурет. Үдеудің проекциялары

Үдеудің үш өзара перпендикуляр бағыттарға проекцияларын біле отырып (1.6-сурет), дененің толық үдеуін анықтай аламыз:

$$a = \sqrt{a_m^2 + a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{g^2 \sin^2 \alpha + (v \cos \alpha)^4 / R^2} . \quad (1.3.1)$$

1.6-суреттегі траекторияның бір орамы вертикаль жазықтықта «жайылып» көрсетілген. Бұдан көрінетіні:  $\sin \alpha = h/l$ ,  $\cos \alpha = 2\pi R/l$ , мұндағы  $l = \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}$  - бір орамның ұзындығы.

Үйкеліс болмағандықтан, ал нормаль реакция күші денеге жұмыс атқармайтындықтан, сонымен бірге  $mgH = mv^2/2$  энергияның сақталу заңынан дененің  $n$  орамдардың  $H = hn$  биіктігінен түскеннен кейін  $v = \sqrt{2ghn}$  жылдамдыққа ие болатындығы шығады. (1.3.1) формулаға қоя отырып, жол соңындағы үдеудің ізделінетін шамасын анықтаймыз:

$$a = \sqrt{\frac{g^2 h^2}{h^2 + 4\pi^2 R^2} + \frac{4g^2 h^2 n^2 (2\pi R)^4}{R^2 (h^2 + 4\pi^2 R^2)}} = \frac{gh}{h^2 + 4\pi^2 R^2} \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2 (1 + 16\pi^2 n^2)}$$

Сырғанау уақытын қозғалыстың вертикаль проекциясы үшін оңай анықтауға болады:

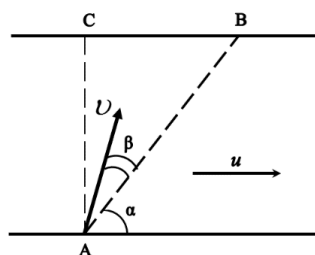
$$H = hn = \frac{a_m t^2}{2} ,$$

бұдан

$$t = \sqrt{\frac{2hn}{a_m}} = \sqrt{\frac{2hn}{g \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{2n(h^2 + 4\pi^2 R^2)}{gh}} .$$

**1.4.** Өзеннің қарама-қарсы жағаларында орналасқан А және В пункт арасында катер жүріп тұрады. Әрқашанда ол АВ түзу бойымен жүреді (1.7-сурет). А және В нүктелері бір-бірінен  $S = 1200$  м ара-қашықтықта орналасқан. Өзен ағысының жылдамдығы  $u = 1,9$  м/с . АВ түзі өзен ағысының бағытымен  $\alpha = 60^\circ$  құрайды. Катер  $t = 5$  мин ішінде А-дан В-ға

және кері қарай барып келу үшін сумен салыстырғанда қандай  $v$  жылдамдықпен және АВ түзумен қандай  $\beta_1$  мен  $\beta_2$  бұрыштарды жасай өзеннің екі бетімен қозғалуы керек?



1.7-сурет.

**Шешімі:** Жағаға қатысты катердің жылдамдығы  $\mathcal{S} = v + u$ . Ол АВ түзу бойымен бағытталған.  $\mathcal{S} = v + u$  теңдіктің АВ түзуіне және оның перпендикуляр бағытына проекцияларын тапсақ, онда келесіні аламыз:

$$\mathcal{S}_1 = v \cos \beta_1 + u \cos \alpha; \quad u \sin \alpha = v \sin \beta_1$$

мұндағы  $\mathcal{S}_1$  - А нүктесінен В нүктесіне қозғалу кезіндегі катердің жылдамдығы. Катердің В нүктесінен А нүктесіне кері қайтқан кезде:

$$\mathcal{S}_2 = v \cos \beta_2 - u \cos \alpha; \quad u \sin \alpha = v \sin \beta_2.$$

Бұдан көрінетіні:  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ . Жалпы қозғалыс уақыты:  $t = \frac{S}{\mathcal{S}_1} + \frac{S}{\mathcal{S}_2} = \frac{S \cdot 2v \cos \beta}{v^2 \cos^2 \beta - u^2 \cos^2 \alpha}$ .

Онда

$$(v \cos \beta)^2 - \frac{2S}{t} \cdot v \cos \beta - u^2 \cos^2 \alpha = 0; \quad v \cos \beta = \frac{S}{t} + \sqrt{\frac{S^2}{t^2} + u^2 \cos^2 \alpha}.$$

Келесі теңдеулер жүйесінен

$$\begin{cases} v \sin \beta = u \sin \alpha \\ v \cos \beta = \frac{S + \sqrt{S^2 + u^2 t^2 \cos^2 \alpha}}{t} \end{cases}$$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{ut \sin \alpha}{S + \sqrt{S^2 + u^2 t^2 \cos^2 \alpha}}$  екендігін анықтаймыз. Бұдан  $\beta = 11,5^\circ$ . Сонымен

$$v = \frac{u \sin \alpha}{\sin \beta} = 8,3 \text{ м/с}.$$

**1.5.** Ұшақ кейбір биіктікте горизонталь траектория бойымен  $a$  тұрақты үдеумен ұшып бара жатыр. Оның жылдамдығы  $v$ -ға тең болғанда одан бір жүкті лақтырады. Жүктің ұшақпен салыстырғандағы бастапқы жылдамдығы нөлге тең. Жердегі бақылаушыға және

ұшқышқа қатысты жүктің құлау траекториясын құрыңыздар. Ауаның кедергісін ескермеңіздер.

**Шешімі:** Жерге қатысты қозғалмайтын санақ жүйесін келесі түрде таңдайық:  $x$  осі ұшақтың қозғалыс жағына бағытталсын, ал  $y$  осі вертикаль жоғары болсын, санақ басы Жердің бетінде жүктің құлау нүктесінде орналассын.

Жүктің қозғалысы бұл координаталар санақ жүйесінің остеріне проекцияларында келесі түрге ие:

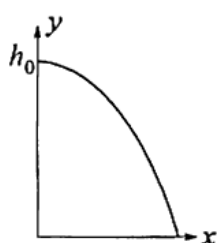
$$x = vt, \quad y = h_0 - gt^2/2 \quad (1.5.1)$$

мұндағы  $h_0$  – ұшақтың ұшу биіктігі. Жүктің траектория теңдеуі (1.5.1)-теңдеуден  $t$  уақыттан құтылу жолымен аламыз:

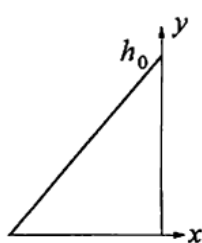
$$y = h_0 - x^2/2v^2$$

Бұл парабола теңдеуі. Оның төбесі координаталары  $x=0, y=h_0$  нүктеде орналасқан. Параболаның төмен қараған тармағы осьпен координат басынан  $x = v_t \sqrt{2h_0/g}$  арақашықтықта қиылысады. Қозғалмайтын координат жүйесінде жүктің траекториясы 1.8а-суретте көрсетілген.

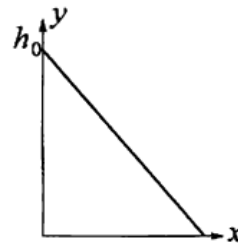
Ұшақпен байланысқан жүктің траекториясын анықтайық.  $x$  осі қозғалыс бағыты бойынша, ал  $y$  осін вертикаль жоғары бағыттауық. Санақ басын әрқашанда Жердің деңгейінде ұшақтың астында орналасқан нүктеде орналассын. Бұл санақ жүйеде жүктің бастапқы жылдамдығы нөлге тең. Жүктің үдеуі ұшаққа қатысты тұрақты.



а)



ә)



б)

1.8-сурет

Бұл үдеудің горизонталь құраушысы ұшақтың үдеуінен қарама-қарсы бағытта бағытталған және оған шамасы жағынан тең, ал вертикаль құраушысы төмен бағытталған және еркін түсу  $g$  үдеуге тең. Осыны ескере отырып, жаңа координаттар жүйесінің остеріне проекцияларымен жүктің қозғалыс теңдеуін жазу қиын емес:

$$x = at^2/2, \quad y = h_0 - gt^2/2$$

Бұл теңдеулер жүйесінен шығатыны:

$$y = h_0 + gx/a$$

Бұл түзу теңдеуі,  $y$  осімен  $y=h_0$  координатамен нүктесінде, ал  $x$  осімен координатасы  $x = ah_0/g$  нүктесінде қиылысады. Ұшақтағы бақылаушы жүктің қозғалыс траекториясын 1.8а,б суреттегідей көреді, мұндағы 1.8ә суреті -  $a > 0$  жағдайға, ал 1.8б суреті  $a < 0$  жағдайға сәйкес келеді.

**1.6.** Мектеп оқушылармен екі экскурсиялық автобус Алматыдан Нұр-Сұлтанға аттануы тиіс еді, бірақ автобустардың біреуі жөнелтумен кешікті. Кешіккен автобус жолға шыққанда, бірінші автобус жөнелту орнынан  $S = 20$  км қашықтықта болған. Кешіккен автобус  $S = 20$  км жүріп өткен уақыт ішінде, бірінші автобус  $S_1 = 16$  км жол жүрді.  $\Delta s = 1$  км ара-қашықтықты жүру үшін екінші автобус бірінші автобустың қарағанда  $\Delta t = 12$  с-ке кем жұмсайды. Екінші автобус бірінші автобусты жөнелту орнынан қандай  $L$  қашықтықта қуып жетеді? Автобустардың  $v_1$  мен  $v_2$  жылдамдықтары қандай? Автобустардың жылдамдықтары өзгермейді деп есептеңіздер.

**Шешімі:** Бірдей уақыт аралығында бірінші және екінші автобустар  $S_1$  және  $S_2$  ара-қашықтықтарды жүріп өтті; демек, олардың жылдамдықтарының ара қатынасы  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_1}{S_2} = 0,8$ .

Екінші автобус  $L$  қашықтық жол жүрген кезде, бірінші автобус  $L-S$  қашықтық жол жүреді, яғни  $\frac{L}{v_2} = \frac{L-S}{v_1}$ . Жылдамдықтардың қатынасын ескере отырып, келесіні аламыз:

$$L = \frac{S}{1 - (v_1/v_2)} = \frac{S^2}{S - S_1} = 100 \text{ км.}$$

Есептің шарты бойынша

$$\Delta t = \Delta s \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) = \frac{\Delta s}{v_1} \left( 1 - \frac{v_1}{v_2} \right) = \frac{\Delta s}{v_1} \left( 1 - \frac{S_1}{S} \right).$$

Осыдан

$$v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t} \left( 1 - \frac{S_1}{S} \right) = 60 \text{ км/сағ,}$$

$$v_2 = v_1 \frac{S}{S_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \left( \frac{S}{S_1} - 1 \right) = 75 \text{ км/сағ.}$$

**1.7.** Екі автокөлік тұрақты, бірдей жылдамдықпен өзара перпендикуляр жолдармен жүріп келе жатыр. Белгілі бір уақыттың моментінде машиналар жолдар қиылысынан  $l_1 = 1$  км және  $l_2 = 3$  км қашықтықта болды. Машиналар арасындағы ең аз қашықтықты табыңыздар.

**Шешімі.** Координат осьтерін жолдардың әрқайсысының бойымен машиналардың қозғалысына бағыттаймыз. Есептің шартында машиналар қиылысқа жақындауы немесе одан алыстауы ескерілмегендіктен, онда  $x_0$  және  $y_0$  координаттары қазіргі уақыттағы машиналар жағдайының  $t = 0$  оң да, теріс те мәндерге ие болуы мүмкін, яғни  $x_0 = \pm 3$  км және  $y_0 = \pm 1$  км. Машиналардың  $x$  және  $y$  координаталары уақыттың  $t > 0$  кез келген сәтінде мына формуламен анықталады:

$$x(t) = x_0 + vt, \quad y(t) = y_0 + vt \tag{1.7.1}$$

Машиналар арасындағы  $l(t)$  ара-қашықтық үшін мына формуланы қолданамыз:

$$l(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad (1.7.2)$$

(1.7.2)-теңдеуде (1.7.1)-теңдеудегі оң жақ бөліктеріндегі  $x(t)$  және  $y(t)$ -ді ауыстырып, содан кейін (1.7.2)-теңдіктің екі жағын квадраттап, қарапайым түрлендірулерден кейін аламыз:

$$2v^2t^2 + 2vt(x_0 + y_0) + x_0^2 + y_0^2 - l^2 = 0 \quad (1.7.3)$$

Бұл теңдеуді  $t$ -қа қатысты шеше отырып, бірдей  $l$  мәніне сәйкес келетін  $t_1$  және  $t_2$  екі мәнін табамыз:

$$t_{1,2} = -\frac{x_0 + y_0}{v} \pm \frac{1}{2v} \sqrt{(x_0 + y_0)^2 - 2(x_0^2 + y_0^2 - l^2)} \quad (1.7.4)$$

Машиналар бір-бірінен бірдей  $l$  қашықтықта екі рет орналасады: алдымен жақындау процесінде, содан кейін алыстау процесінде.

Сондықтан (1.7.3)-теңдеудің екі шешімі бар болады.  $l = l_{\min}$  кезінде (1.7.4) түбірінің астындағы өрнек нөлге айналады, яғни:

$$(x_0 + y_0)^2 = 2(x_0^2 + y_0^2 - l_{\min}^2), \quad (1.7.5)$$

(1.7.3)-теңдеудің жалғыз шешімі бар:

$$t_1 = t_2 = -\frac{x_0 + y_0}{2v} \quad (1.7.6)$$

$l_{\min}$  үшін (1.7.5)-теңдеуден табамыз:

$$l_{\min} = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}$$

(1.7.6)-теңдеуден шығатыны,  $t = t_1 = t_2 > 0$  тек  $x < 0$  болған жағдайда ғана, яғни,  $x_0 = -3$  км болғанда орындалады. Бұл жағдайда  $y_0$  оң да, теріс те болуы мүмкін. Егер  $y_0 = -1$  км болса, онда  $l_{\min} = \sqrt{2}$  км, егер  $y_0 = 1$  км болса, онда  $l_{\min} = 2\sqrt{2}$  км. Егер  $x_0 = 3$  км болса, онда  $y_0$  оң немесе теріс болса да,  $t = 0$  бастапқы моментте  $l$  ең минималды. Бұл жағдайдағы есептеу  $l_{\min}$  үшін келесі мәнді береді:

$$l_{\min} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{10} \text{ км.}$$

**1.8.** Дене кейбір биіктіктен жерге еркін түседі. Дененің бастапқы жылдамдығы нөлге тең. Соңғы секундта ол бүкіл жолдың үштен бір бөлігін өтті. Дене қандай биіктіктен және қанша уақытта құлады? Ауаның кедергісін ескермеңіздер.

**Шешімі.**  $h$  арқылы дене түсетін биіктігін, ал  $t_h$  арқылы - оның осы биіктіктен түсу уақытын белгілейік. Бұл шамалардың бір-бірімен байланысы келесідей:

$$h = gt_h^2 / 2 \quad (1.8.1)$$

$h$  және  $t_h$  шамаларын табу үшін (1.8.1) –теңдеуден басқа тағы бұл шамаларды бір-бірімен байланыстыратын бір теңдеу қажет. Қозғалыс басталғаннан бастап дене  $t_h - t$  уақыт ішінде дене  $g(t_h - t)^2 / 2$  -ге тең жол жүреді. Есептің шарты бойынша  $t = t_0 = 1$  с кезінде бұл жол  $h - h/3 = 2h/3$ . Сонымен,

$$2h/3 = g(t_h - t_0)^2 / 2 \quad (1.8.2)$$

(1.8.1)-(1.8.2)–теңдеулер жүйесін  $h$  шамасын алып тастағанда, келесі теңдеуді аламыз:

$$t_h^2 - 6t_0t_h + 3t_0^2 = 0 \quad (1.8.3)$$

Бұл теңдеудің екі түбірінен  $t_h > t_0$  шартын қанағаттандыратын біреуін таңдауымыз керек. Осыны ескере отырып, (1.8.3) – теңдеуден аламыз:

$$t_h = (3 + \sqrt{6})t_0 = 5,45c$$

$t_h$  -ты біле отырып, (1.8.1)-формула бойынша табамыз:

$$h = \frac{3}{2}g(5 + 2\sqrt{6})t_0^2 = 150 \text{ м}$$

**1.9.** Тасты жер бетінен  $h_0 = 10$  м биіктіктен  $v_0 = 10$  м/с бастапқы жылдамдықпен тік жоғары лақтырылады.  $t_0 = 1$  с уақыттан өткеннен кейін жер бетінен тік жоғары  $u_0 = 20$  м/с бастапқы жылдамдықпен басқа тасты лақтырады. Тастар қанша уақыттан кейін және қандай биіктікте соқтығысады?

**Шешімі.** Жер бетінен  $h$  биіктігін жоғары қарай оң бағытты деп есептейміз. Бірінші және екінші тастардың қозғалыс теңдеулері сәйкесінше келесідей жазылады:

$$h_1(t) = h_0 + v_0t - gt^2 / 2$$

$$h_2(t) = u_0(t - t_0) - g(t - t_0)^2 / 2$$

Тастардың  $T$  соқтығысу моменті келесі шарттан анықталады:

$$h_1(T) = h_2(T),$$

немесе

$$h_0 + v_0 T - gT^2 / 2 = u_0(T - t_0) - g(T - t_0)^2 / 2$$

Осыдан

$$T = \frac{h_0 + u_0 t_0 - g t_0^2 / 2}{u_0 - v_0 + g t_0} = 1,75 \text{ с}$$

Сонымен, жер бетінен  $H$  биіктігінен бірінші тасты лақтырғаннан кейін 1,75 с кейін тастар соқтығысады:

$$H = h_1(T) = h_2(T) = h_0 + v_0 T - gT^2 / 2 = 12,2 \text{ м}$$

**1.10.** Танктің оң және сол жақ шынжыр табандары  $\omega_1$  және  $\omega_2$  бұрыштық жылдамдықтарымен бір бағытта айналады. Танк қозғалатын шеңбердің радиусын, қозғалысының бұрыштық жылдамдығын табыңыздар. Танктің ені  $l$ , алдыңғы доңғалақтарының радиусы  $r$ . Танктің шынжыр табандарының орталары жерге қатысты сырғанақтамайды.

**Шешімі.** Сырғанақтау болмағандықтан, танктің сол және оң жақтарының орта бөліктері кіші  $\Delta t$  уақыт ішінде сәйкескінше келесі жолды жүреді:

$$\Delta S = v \Delta t = \omega_1 r \Delta t, \quad (1.10.1)$$

$$\Delta S = v \Delta t = \omega_2 r \Delta t. \quad (1.10.2)$$

Алайда,

$$\Delta S = \omega(R - l/2) \Delta t, \quad (1.10.3)$$

$$\Delta S = \omega(R + l/2) \Delta t, \quad (1.10.4)$$

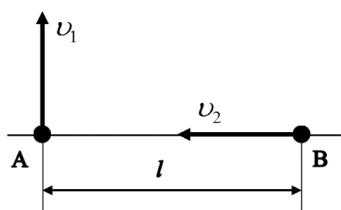
мұндағы  $R$  - танктің центрі қозғалатын шеңбердің радиусы, ал  $\omega$  танктің центрінің бұл шеңбердің центрі айналасындағы қозғалыстың бұрыштық жылдамдығы. (1.10.1) - (1.10.4) – теңдеулерден келесіні табамыз:

$$\omega = (\omega_2 - \omega_1) \frac{r}{l}, \quad R = \frac{l(\omega_1 + \omega_2)}{2(\omega_2 - \omega_1)}.$$

## Өз бетімен шығаруға арналған есептер

**1.11.** Екі автомобиль  $v_1$  мен  $v_2$  жылдамдықпен тік бұрышпен қиылысатын жолдармен қозғалады (1.9-сурет). Бірінші автомобиль жол қиылысына жеткен кезде бұл жерге дейін

екінші автомобильге  $l$  ара-қашықтықты өтуге қалады. Қанша  $t$  уақыт өткеннен кейін автомобильдердің арасындағы жол ең минималды болады?  $S_{\min}$  ара-қашықтық неге тең?



1.9-сурет

**1.12.**  $P_1$  және  $P_2$  қуаттылығымен жабдықталған автомобильдер тиісінше  $v_1$ ,  $v_2$  жылдамдықтармен қозғалады. Егер оларды арқанмен жалғайтын болса, онда автомобильдердің жылдамдығы қандай болады?

**1.13.** Биіктігі  $H$  тік жартастан массасы  $m$  тасты  $v_0$  жылдамдығымен горизонталь лақтырған. Біраз уақыттан кейін ол тұрақты жылдамдықпен қозғала бастады. Ауа кедергісінің күші жылдамдыққа пропорционалды деп есептей отырып ( $\vec{F} = -k\vec{v}$ ), келесілерді анықтаңыздар: құлау кезінде тастың жартастан алыстаған  $L$  ара-қашықтығы; тастың қозғалыс  $\tau$  уақыты.

**1.14.** Қоян қасқырдан түзу бойымен бірқалыпты жылдамдықпен қашып қозғалады. Бастапқы уақыт моментінде қоян мен қасқыр арасындағы ара-қашықтық  $S=36$  м-ге тең, ал қасқырдың жылдамдығы  $v_0=14$  м/с -ке тең. Қасқыр жүгіруден шаршап, әрбір  $\Delta t=10$  с сайын ( $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$  уақыт моментерінде) өзінің жылдамдығын  $\Delta v=1$  м/с шамаға кемітеді. Қасқыр қоянды ұстап алмас үшін, қоян қандай жылдамдықпен қашу керек?

**1.15.** Қозғалмайтын эскалатормен көтеріле отырып, адам  $N_0$  баспалдақтан көтеріледі. Егер эскалатордың жылдамдығы  $v_1$ , ал эскалаторға қатысты адамның жылдамдығы  $v_2$  болса, онда адам жоғары қозғалатын эскалатормен қанша баспалдақтан өтеді?

**1.16.** Тректің дөңгелек жолының ұзындығы 360 м. Екі велосипедші  $v_1=9$  м/с және  $v_2=15$  м/с жылдамдығымен қарама-қарсы бағытта трек бойынша жүреді. Тректің кейбір жерінде кездесуден кейін қандай аз уақыт өткен соң, олар қайтадан бұл жерде кездеседі?

**1.17.** Екі автобус аялдамасының арасындағы ара-қашықтық 400 м. Автобус аялдамадан шығып, ең жоғары жылдамдығы 36 км/сағ-қа дейін үдетіліп қозғалады, ал келесі аялдаманың алдында тежелі бастайды. Егер бір аялдамадан екінші аялдамаға дейінгі қозғалысқа 1 мин кетсе, ал автобустың үдетілуі мен тежелуі тұрақты (тең емес) үдеулермен жүрсе, автобус 36 км/сағ жылдамдықпен қандай жол жүрді?

**1.18.** Екі мәшине жол қиылысына қарай өзара  $\alpha < \pi/2$  бұрыш жасайтын түзу жолмен жүріп келе жатыр. Мәшиналардың жылдамдықтары тұрақты, олардың қатынасы  $v_1/v_2 = \cos \alpha$ . Бастапқы  $t=0$  уақыт моментінде мәшиналар жол қиылысынан сәйкесінше  $l_1$  мен  $l_2$  ара-қашықтықтарда орналасты. Мәшиналардың барлық қозғалыс уақыты кезіндегі олардың арасындағы минималды ара-қашықтықты анықтаңыздар.

**1.19.** Дене шамасы және бағыты бойынша тұрақты  $a$  үдеумен бастапқы жылдамдықсыз қозғала бастайды. Кейбір моментте дененің үдеуі қарама-қарсы бағытқа өзгереді. Қозғалыс басталғаннан кейінгі  $t_0$  уақыт ішіндегі жүрілген жолды анықтаңыздар, егер  $t_0$  уақыттағы орын ауыстыру нөлге тең болса.

**1.20.** Радиустары  $r$  бірдей екі дөңгелек ұзын түзу тақтайша бойымен сырғанақтаусыз бір-біріне қарама-қарсы домалайды. Қозғалмайтын санақ жүйесінде оң дөңгелектің центрі

$u_1$  жылдамдықпен ілгерілемелі, ал дөңгелектің өзі өзінің центрі айналасында  $\omega$  бұрыштық жылдамдықпен сағат тіліне қарама-қарсы айналады. Сол дөңгелектің центрі ілгерілемелі  $u_2$  жылдамдықпен қозғалады. Сол дөңгелектің айналмалы қозғалысының бұрыштық жылдамдығын анықтаңыздар.